Числовые ряды

План лекции

- Общие определения
- Понятие степенного ряда
- Разложение функций в степенной ряд
- Применение некоторых рядов

Числовой ряд

- Бесконечная сумма чисел вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется **числовым рядом**,

а *a_1, a_2,a_3, …, a_n*, … - членами числового ряда, при этом известен закон, позволяющий определить каждый элемент этого ряда. **Общим членом** ряда называется n-элемент данного ряда a_n.

Сходящиеся и расходящиеся ряды

- Ряд называется ***сходящимся***, если последовательность частичных сумм $S_1, S_2, \ldots, S_n$ этого ряда имеет конечный предел:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

где $S_1=u_1$, $S_2=u_1+u_2$, …, $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ - частичные суммы ряда.

- В противном случае ряд является ***расходящимся.***

Условие сходимости ряда

- Ряд может **сходиться** только при условии, что его общий член при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$$

это необходимый признак сходимости ряда.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) \neq 0$$

Если же , то ряд **расходится** – это достаточный признак расходимости ряда.

ПРИМЕР

- Рассмотрим ряд вида: $1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots$это геометрическая прогрессия.
- Найдем сумму первых *n* членов данного ряда:

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

- Если $|q|<1$, то при стремлении *n* к бесконечности $q^n \to 0$, тогда ,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} = const$$

то есть ряд сходится.

- Если $|q|>1$, то рассматриваемый ряд будет расходиться, так как $q^n\to\infty$ при $n\to\infty$, значит и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Понятие степенного ряда

- Бесконечная сумма степенных функций вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

называется **степенным рядом**, а числа a_0, a_1, a_2, ..., a_n,... называются **коэффициентами** этого ряда.

- Множество тех значений *x,* при которых ряд сходится, называется **областью его сходимости.**

Радиус сходимости ряда

- Число ***R*** называется ***радиусом сходимости*** ряда, если при |x|< R ряд сходится, а при |x|>R ряд расходится.
- Интервал *(-R;R)* в этом случае называется ***интервалом сходимости ряда***.
- Радиус сходимости ряда можно найти по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

если соответствующий предел существует.

Разложение функций в степенной ряд

- Для того, чтобы функцию *f(x)* можно было разложить в степенной ряд на некотором интервале (в окрестности точки x_0), **необходимо и достаточно**, чтобы функция *f(x)* на нем была определена и имела производные всех порядков.
- Кроме того, полученный степенной ряд на данном интервале должен сходиться.
- Такой ряд получил название ***ряда Тейлора*** для функции *f(x)* в окрестности точки .

Ряд Тейлора

- **Рядом Тейлора** функции *f(x)* в окрестности точки x_0 называется степенной ряд

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

относительно разности $(x - x_0)$, коэффициенты которого выражаются через функцию *f(x)* и ее производные в точке x_0 по формулам:

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$n = 1,2,3,\ldots$$

Ряд Маклорена

- Если в данном разложении положить $x_0=0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называется ***рядом Маклорена*** функции *f(x)*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Применение рядов Тейлора и Маклорена

- Для приближенных вычислений значений функции.
- Для интегрирования сложных функций.
- Для решения дифференциальных уравнений.

Практические задания

- Какие из перечисленных выражений являются числовым рядом; степенным рядом; числовой последовательностью

$$1)\ \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

$$2)\ arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{8}+arctg\frac{1}{18}+\ldots$$

$$3)\ x+x^{2}+x^{3}+\ldots+x^{n}+\ldots$$

$$4)\ 2,4,8,32,\ldots$$

$$5)\ \frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{4}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^{2}}+\ldots$$

- Записать выражение для общего члена $a_n(x)$ функционального ряда

$$1)\ x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\ldots$$

$$2)\ x\,tg\frac{x}{2}+x^2tg\frac{x}{4}+x^3tg\frac{x}{8}+\ldots$$

- Ответы:

$$\frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$x^n tg\frac{x}{2^n}$$

- Разложить в ряд Маклорена следующую функцию: ***f(x)=e^x^***

- Ряд Маклорена имеет вид:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

- Найдем коэффициенты этого ряда:

$$a_0 = f(0) = e^0 = 1$$

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{e^0}{2!} = \frac{1}{2!}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$$

- Подставив коэффициенты в ряд Маклорена, получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

- Найдем интервал, в котором полученный ряд сходится к функции e^x.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

- Следовательно, ряд Маклорена сходится к e^x на всей числовой прямой.
- Найдем приближенное значение е, используя данное разложение.
- Присвоим переменной х значение 1, т.е. х=1, тогда

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 1 + 1 + 0.5 + 1/6 + 1/24 \approx 2.7182\ldots$$

- Разложить в ряд Тейлора следующую функцию f(x)=ln(x) в окрестности точки x=1.
- Ряд Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

- Найдем коэффициенты этого ряда

$$a_0 = f(x_0) = \ln 1 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} = -\frac{1}{2! \cdot x_0^2} = -\frac{1}{2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!} = \frac{-(-2)}{3! \cdot x_0^3} = \frac{2}{3!}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n! \cdot x_0^n}$$

- Подставим коэффициенты и получим

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} + \ldots$$

- Область сходимости этого ряда можно найти по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n} = 1$$

- Вывод: данный ряд будет сходиться, если $(x-x_0)<R$, то есть для значений x, находящихся вблизи $x_0=1$ или $0<x<2$

__Пример:__ Найти значение определенного интеграла $\int_0^1 \frac{Sinx}{x}dx$.

Решение: Этот интеграл не берется обычными методами, поэтому воспользуемся разложением подынтегральной функции в ряд Маклорена: $Sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$. Подставим данный ряд в интеграл и получим: $\int_0^1 \frac{Sinx}{x}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)\frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...\right)dx$. Разделим каждое слагаемое на x и разложим данный интеграл на сумму интегралов, которые являются табличными: $\int_0^1 \frac{Sinx}{x}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ...\right)dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{6 \cdot 6!} + ... \approx 0{,}946$.

__Пример:__ Решить дифференциальное уравнение $y'x^2 = e^x$.

Решение: Выразим y' и представим его через дифференциалы, получим $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{x^2}$. Разделим переменные $dy = \frac{e^x}{x^2}dx$ и проинтегрируем полученное тождество: $\int dy = \int \frac{e^x}{x^2}dx$. Получим $y = \int \frac{e^x}{x^2}dx$.

Интеграл, стоящий в правой части тождества, можно найти только воспользовавшись разложением функции e^x в ряд Маклорена $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$. Тогда

$$y = \int \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right)dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-2}}{n!}\right)dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{1}{2!}x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)} + C.$$

Данное решение справедливо для любого x, так как ряд Маклорена функции e^x сходится на всей числовой прямой.